Journal of Radiation Researches, vol.5, No.2, 2018, Baku

PACS: 03.65.-w, 03.65.Fd

О ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ СВОБОДНОЙ НЕРЕАЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Ш.М. Нагиев[1], А.И. Ахмедов[2], Ш.А. Амирова[1]

[1]*Институт Физики, Азербайджанская Национальная Академия Наук,*
[2]*Институт Физических Проблем, Бакинский Государственный Университет*
shakir.m.nagiyev@gmail.com, ahmadovazar@yahoo.com

Резюме: С помощью метода оператора эволюции построены когерентные состояния нерелятивистской свободной квантовой частицы с переменной массой $M(t)$. При определенных физических условиях их можно рассматривать как полуклассические состояния частиц. Подробно обсуждаются свойства найденных когерентных состояний, в частности соотношение полноты, минимизация соотношений неопределенности и эволюции соответствующей плотности вероятности во времени. Для рассматриваемых систем построены также точные волновые функции осцилляторного типа и типа плоской волны.

Ключевые слова: нерелятивистская квантовая свободная частица, оператор эволюции, когерентные состояния, осцилляторные состояния.

1. Введение

Временная эволюция нестационарных квантовых систем, т.е. систем с явно зависящим от времени гамильтонианом, привлекла большое внимание из-за их различных применений в разных областях физики. Нестационарные системы были давней математической проблемой, еще не полностью решенной вообще. Поэтому нестационарные задачи в квантовой механике обычно решаются с помощью приближенных методов. В квантовой механике исследование точно решаемых задач играют важную роль, являясь, в частности, базой для развития приближенных методов. Точные решения могут нести больше информация о физической системе, чем приближенные решения. Число квантовых систем, для которых уравнение Шредингера имеет точное решение немного. К таким системам, в первую очередь, относятся квадратичные квантовые системы.

Разработаны различные методы нахождения точных решений нестационарных систем, таких как метод функционального интегрирования Фейнмана [1], метод факторизации [2,3], метод инвариантов Льюиса-Ризенфельда (интегралы движения) [4,5], метод пространственно-временных преобразований [6,7], метод оператора эволюции [8-14], метод производящих функций [6,15,16], метод пробной функции [6,17] и т.д. В данной работе мы применяем метод оператора эволюции к изучению свойств свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы.

Состояние $\psi(t)$ системы в нерелятивистской квантовой механике эволюционирует из начального состояния $\psi(t_0)$ в соответствии с уравнением Шредингера

$$\hat{S}(t)\psi(t)=0, \qquad \hat{S}(t)=i\hbar\partial_t - H(t), \tag{1}$$

где $\hat{S}(t)$ является оператором Шрёдингера. С помощью оператора эволюции $U(t)$ решение этого уравнения можно представить в виде

$$\psi(t) = U(t)\psi(t_0)\,. \tag{1.2}$$

Оператор эволюции удовлетворяет уравнению Шредингера $\hat{S}(t)U(t) = 0$ с начальным условием $U(t_0) = 1$, решение которого формально записывается как упорядоченный по времени интеграл

$$U(t) = T\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_o}^{t} H(t')dt'\right\}. \tag{1.3}$$

Согласно определению (1.2) вся информация о динамике системы содержатся в матричных элементах оператора эволюции. Но найти явный вид оператора эволюции - непростая задача. В связи с этим стоит отметить, что оператор временной эволюции известен явно только в нескольких специальных случаях.

Подчеркнем, что свободная нерелятивистская квантовая частица переменной массы $M(t)$ – это самая простая по физическим свойствам нестационарная квантовая система. Несмотря на это, и она может обладать нетривиальными свойствами, зависящими от выбора начального состояния $\psi(t_0)$. В связи с этим отметим, что в работе [18] с помощью метода интегралов движения были построены различные семейства обобщенных когерентных состояний (КС) свободной нерелятивистской частицы постоянной массы $M(t) = m =$const. Работа [13] посвящена обобщению результатов работы [18] на случаи свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы $M(t)$ и нерелятивистской квантовой частицы переменной массы $M(t)$ в переменном однородном поле. При этом был использован метод оператора эволюции. Там же установлена унитарная эквивалентность задачи о свободной частице с задачей о частицы в однородном поле, а также были построены точные квантовые состояния гауссовского и осцилляторного типов и типа Эйри. Для этих волновых функций вычислены функции Вигнера. Однако эти исследования касаются одномерных случаев.

Цель данной работы – изучить временную эволюции трехмерной свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы, т.е. обобщить результаты работы [13] на трехмерный случай. Здесь мы получаем с помощью метода оператора эволюции КС и точные решения уравнения Шредингера.

2. Инварианты

а) Координатное представление. Рассмотрим квантовое движение свободной нерелятивистской частицы переменной массы $M(t)$ в трехмерном пространстве R^3. Оно описывается временным уравнением Шредингера

$$\hat{S}(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) = 0,$$
$$\hat{S}(\mathbf{r},t) = i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M(t)}\nabla^2 = i\hbar\partial_t - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M(t)}\,, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}=(x,y,z)$ and $\hat{\mathbf{p}}=-i\hbar\nabla=(\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z)$ - операторы координат и импульса. Оператор эволюции для свободной частицы имеет самый простой вид

$$U(\mathbf{r},t)=e^{i\hbar S_2(t)\nabla^2}=e^{-i\hbar^{-1}S_2(t)\hat{\mathbf{p}}^2}. \tag{2.2}$$

Здесь введено обозначение $S_2(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{2M(t')}$. При $M(t)=m=$ const имеем выражение $S_2(t)=\frac{\tau}{2m}$, где $\tau=t-t_0$.

в) Импульсное представление. Напишем уравнения (2.1) и (2.2) в импульсном $\mathbf{p}$-представлении

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p},t)\phi(\mathbf{p},t)=0, \qquad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p},t)=i\hbar\partial_t-\frac{\mathbf{p}^2}{2M(t)}. \tag{2.3}$$

В этом представлении оператор эволюции свободной частицы записывается в виде оператора умножения, т.е.

$$U(\mathbf{p},t)=e^{-i\hbar^{-1}S_2(t)\mathbf{p}^2}. \tag{2.4}$$

2.2. Инварианты. Под инвариантами квантовой физической системы понимают такие зависящие от времени операторы $I(t)$, средние значения $\bar{I}(t)=<\psi(t),I(t)\psi(t)>$ которых в любом состоянии $\psi(t)$ системы не зависит от времени, т.е. $d\bar{I}(t)/dt=0$. Инвариант $I(t)$ коммутирует с оператором Шредингера, т.е. $\left[\hat{S}(t),I(t)\right]=0$ и переводит каждое решение уравнения Шредингера в другое решение этого же уравнения.

а) Базисные инварианты. Зная оператора эволюции $U(t)$ можно построить 2N независимых инварианта для квантовой системы, где N-число степеней свободы системы. В нашем случае имеются шесть независимых базисных инварианта $\hat{\mathbf{r}}_0(t)$ и $\hat{\mathbf{p}}_0(t)$. Их можно построить по формулами [5]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_0(t)&=U(t)\hat{\mathbf{r}}U^{-1}(t)=\hat{\mathbf{r}}-2S_2(t)\hat{\mathbf{p}},\\ \hat{\mathbf{p}}_0(t)&=U(t)\hat{\mathbf{p}}U^{-1}(t)=\hat{\mathbf{p}},\end{aligned} \tag{2.5}$$

причем $\hat{\mathbf{r}}_0(0)=\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}_0(0)=\hat{\mathbf{p}}_0(t)=\hat{\mathbf{p}}$. При $M(t)=m=$const имеем $\hat{\mathbf{r}}_0(t)=\hat{\mathbf{r}}-\frac{\tau}{m}\hat{\mathbf{p}},\ \hat{\mathbf{p}}_0(t)=\hat{\mathbf{p}}$.

Все остальные инварианты $I_n(t)$, где n=1,2,3,…есть порядок инварианта, выражаются через базисные инварианты $\hat{\mathbf{p}}_0(t)$ и $\hat{\mathbf{r}}_0(t)$. Здесь мы будем построить линейные $I_1(t)$ и квадратичные $I_2(t)$ инварианты.

в) Линейные инварианты. Ясно, что в общем случае линейные инварианты можно представить в виде

$$I_1(t)=\mathbf{a}_0\hat{\mathbf{p}}_0(t)+\mathbf{b}_0\hat{\mathbf{r}}_0(t)=\mathbf{a}(t)\hat{\mathbf{p}}+\mathbf{b}_0\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 - 2S_2(t)\mathbf{b}_0$, а $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ являются произвольными постоянными векторными величинами, которые могут быть и комплексными. Частным случаем (2.6) будет векторный линейный инвариант $\mathbf{I}_1 = (I_{1x}, I_{1y}, I_{1z})$:

$$\mathbf{I}_1(t) = a_0\hat{\mathbf{p}}_0(t) + b_0\hat{\mathbf{r}}_0(t) = a(t)\hat{\mathbf{p}} + b_0\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.7}$$

Здесь $a(t) = a_0 - 2S_2 b_0$, а a_0 и b_0 - произвольные постоянные вещественные или комплексные скалярные величины.

с) Квадратичные инварианты. Мы можем записать следующее общее выражение для квадратичных инвариантов:

$$\begin{aligned} I_2(t) &= (\mathbf{a}_0\hat{\mathbf{p}}_0(t))(\tilde{\mathbf{a}}_0\hat{\mathbf{p}}_0(t)) + (\mathbf{b}_0\hat{\mathbf{r}}_0(t))(\tilde{\mathbf{b}}_0\hat{\mathbf{r}}_0(t)) + (\mathbf{c}_0\hat{\mathbf{p}}_0(t))(\tilde{\mathbf{c}}_0\hat{\mathbf{r}}_0(t)) + \\ &+ (\mathbf{d}_0\hat{\mathbf{r}}_0(t))(\tilde{\mathbf{d}}_0\hat{\mathbf{p}}_0(t)) + \mathbf{e}_0\hat{\mathbf{p}}_0(t) + \tilde{\mathbf{e}}_0\hat{\mathbf{r}}_0(t), \end{aligned} \tag{2.8}$$

в котором коэффициенты $\mathbf{a}_0$, $\tilde{\mathbf{a}}_0$ и т.д. являются произвольными постоянными комплексно-значными векторными величинами. Используя формулы (2.5) можем выразить их через операторы $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$.

д) Операторы уничтожения и рождения. С помощью оператора эволюции (2.2) построим интегралы движения – операторы уничтожения и рождения для свободной частицы $\mathbf{A}^-(t) = (A_x^-(t), A_y^-(t), A_z^-(t))$ и $\mathbf{A}^+(t) = (A_x^+(t), A_y^+(t), A_z^+(t))$, линейные по операторам $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$. Пусть

$$\mathbf{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\lambda_1\hat{\mathbf{r}} + i\lambda_2\hat{\mathbf{p}}),\ \mathbf{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\lambda_1^*\hat{\mathbf{r}} - i\lambda_2^*\hat{\mathbf{p}}) \tag{2.9}$$

являются операторами уничтожения и рождения, где λ_1 и λ_2 –комплексные числа. Из условия коммутации $[\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] = \sum_{i=1}^{3}[a_i^-, a_i^+] = 3$ следует, что

$$\mathrm{Re}(\lambda_1^*, \lambda_2) = 1. \tag{2.10}$$

Если положить $\lambda_1 = |\lambda_1|\exp(i\mu_1)$, $\lambda_2 = |\lambda_2|\exp(i\mu_2)$, то условие (2.10) примет вид $|\lambda_1||\lambda_2|\cos(\mu_1 - \mu_2) = 1$. Из (2.9) и (2.10) следует, что

$$\hat{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\lambda_2^*\mathbf{a}^- + \lambda_2\mathbf{a}^+\right), \quad \hat{\mathbf{p}} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\lambda_1\mathbf{a}^+ - \lambda_1^*\mathbf{a}^-\right) \tag{2.11}$$

Искомыми операторами уничтожения и рождения для свободной частицы теперь будут операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^-(t) &= U\,\mathbf{a}^- U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\lambda_1\hat{\mathbf{r}} + i\varepsilon(t)\hat{\mathbf{p}}\right], \\ \mathbf{A}^+(t) &= U\,\mathbf{a}^+ U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\lambda_1^*\hat{\mathbf{r}} - i\varepsilon^*(t)\hat{\mathbf{p}}\right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\varepsilon(t) = \lambda_2 + 2i\lambda_1 S_2(t)$. Можно убедиться, что операторы $\mathbf{A}^{\mp}(t)$ коммутируют с оператором Шрёдингера $\mathbf{S}(t)$ (2.1) и, следовательно, действительно являются инвариантами. Имеют место следующие коммутационные соотношения

$$[A_i^-, A_j^+] = \delta_{ij,} \ [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+] = 3, \qquad i, j = 1,2,3. \tag{2.13}$$

Аналогично (2.11), из (2.12) вытекает, что

$$\hat{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\varepsilon^*(t)\mathbf{A}^-(t) + \varepsilon(t)\mathbf{A}^+(t)\right), \quad \hat{\mathbf{p}} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\lambda_1\mathbf{A}^+(t) - \lambda_1^*\mathbf{A}^-(t)\right). \tag{2.14}$$

Переход от переменных $(\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+)$ к переменным $(\mathbf{A}^-(t), \mathbf{A}^+(t))$ является линейным каноническим преобразованием:

$$\mathbf{A}^-(t) = \mu(t)\mathbf{a}^- + \nu(t)\mathbf{a}^+, \ \mathbf{A}^+(t) = \mu^*(t)\mathbf{a}^+ + \nu^*(t)\mathbf{a}^-, \tag{2.15}$$

где $\mu = \frac{1}{2}[\lambda_1\lambda_2^* + \lambda_1^*\varepsilon(t)], \ \nu = \frac{1}{2}[\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\varepsilon(t)]$ и $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1.$

3. Зависящие от времени обобщенные когерентные состояния

Введем КС $|\boldsymbol{\alpha}, t>$ для свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы $M(t)$, определяя их как собственные состояния оператора уничтожения $\mathbf{A}^-(t)$ [5,19], отвечающие собственному значению $\boldsymbol{\alpha}$

$$\mathbf{A}^-(t)|\boldsymbol{\alpha}, t> = \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}, t>, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$– постоянный вектор, компоненты которого являются комплексными числами. Из (2.16) и (3.1) следует, что средние значения операторов координат и импульса в этих состояниях равны

$$\bar{\mathbf{r}} \equiv <\boldsymbol{\alpha}, t|\hat{\mathbf{r}}|\boldsymbol{\alpha}, t> = \bar{\mathbf{r}}_0 + 2S_2(t)\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{p}} \equiv <\boldsymbol{\alpha}, t|\hat{\mathbf{p}}|\boldsymbol{\alpha}, t> = \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0}. \tag{3.2}$$

где $\mathbf{a}^-|\boldsymbol{\alpha}> = \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}>$ и

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= <\boldsymbol{\alpha}, t|\mathbf{A}(t)|\boldsymbol{\alpha}, t> = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\lambda_1\bar{\mathbf{r}}_0 + i\lambda_2\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0}),\\
\bar{\mathbf{r}}_0 &\equiv <\boldsymbol{\alpha}|\hat{\mathbf{r}}|\boldsymbol{\alpha}> = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\lambda_2^*\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}^*),\\
\bar{\mathbf{p}}_0 &\equiv <\boldsymbol{\alpha}|\hat{\mathbf{p}}|\boldsymbol{\alpha}> = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}^* - \lambda_1^*\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) определяет функцию $\psi_\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} \,|\, \boldsymbol{\alpha}, t \rangle$ с точностью до коэффициента, зависящего от времени и $\boldsymbol{\alpha}$. Этот фактор можно получить из уравнения Шредингера и условия нормировки. Однако удобно определить явный вид КС (3.1) методом оператора эволюции. Этот метод позволяет нам найти явный вид КС сразу и мы в $\mathbf{r}$-представлении получаем

$$\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)=U(\mathbf{r},t)\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r})=L_0\exp\left\{-\frac{\lambda_1[\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}(t)]^2}{2\hbar\varepsilon(t)}+\frac{i}{\hbar}\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}\left[\mathbf{r}-\frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}\ (t)\right]\right\}. \tag{3.4}$$

Здесь $\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r})\equiv<\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}>$, а нормировочный множитель $L_0=(\pi\hbar)^{-3/4}[\varepsilon(t)]^{-3/2}$ найден из условия $\int|\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)|^2d\mathbf{r}=\int|\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r})|^2d\mathbf{r}=1$. При вычислении действия оператора эволюции $U(\mathbf{r},t)$ в (3.4) мы воспользовались формулой

$$e^{\alpha\nabla^2}f(\mathbf{r})=(4\pi\alpha)^{-3/2}\int e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4\alpha}}f(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \tag{3.5}$$

Иногда формулу (3.5) удобно представить в следующем виде

$$e^{\alpha\nabla^2}f(\mathbf{r})=\sum_{n,m,k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+m+k}}{n!m!k!}\partial_z^{2k}\partial_y^{2m}\partial_x^{2n}f(x,y,z). \tag{3.6}$$

Выражение (3.4) является обобщением формулы (3.8) работы [13] на трехмерный случай. Функции (3.4) образуют семейство КС, параметризованных двумя комплексными числами λ_1 и λ_2, удовлетворяющими ограничению (2.12)*).

Перечислим некоторые свойства КС (3.4): 1) из дальнейшего будет ясно, что эти КС в начальный момент времени $t=t_0$ минимизируют соотношение неопределенности Гейзенберга для операторов $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$, в то время как для последующих моментов времени $t>t_0$ минимизируют соотношение неопределенности Робертсона-Шредингера; 2) КС (3.4) подчиняются нестационарному уравнению Шредингера $\hat{S}(\mathbf{r},t)\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)=0$, и это может быть проверено путем прямого дифференцирования $\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)$; 3) для них условия перекрытия и полноты записываются в виде

$$\begin{gathered}\int\psi^*_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)\psi_{\boldsymbol{\alpha}'}(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}=\exp\left[\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}'-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\alpha}'|^2\right],\\ \int\psi^*_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r}',t)d^2\boldsymbol{\alpha}=\pi^3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\end{gathered} \tag{3.7}$$

где $d^2\boldsymbol{\alpha}=d^2\alpha_x d^2\alpha_y d^2\alpha_z$, $d^2\alpha_x=d\,\mathrm{Re}\,\alpha_x d\,\mathrm{Im}\,\alpha_x$ и т.д.

*) Можно рассматривать и семейство КС, параметризованных шестью комплексными числами λ_{1i} и λ_{2i} $(i=1,2,3)$, попарно удовлетворяющими ограничению (2.12):

$$\tilde{\psi}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)=\prod_{i=1}^{3}N_{0i}e^{-\frac{\lambda_{1i}[x_i-\bar{x}_i(t)]^2}{2\hbar\varepsilon_i(t)}+ip_{0i}\left[x_i-\frac{1}{2}\bar{x}_i(t)\right]},\quad N_{0i}=(\pi\hbar)^{-1/4}[\varepsilon_i(t)]^{-1/2}. \tag{3.8}$$

Приведем теперь вид КС (3.4) в импульсном $\mathbf{p}$-представлении. С помощью Фурье преобразования находим, что

$$\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{p},t) = (\pi\hbar)^{-3/4}\lambda_1^{-3/2}\exp\left\{-\frac{\varepsilon(t)}{2\hbar\lambda_1}(\mathbf{p}-\overline{\mathbf{p}}_0)^2 - \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\frac{1}{2}\overline{\mathbf{p}}_0)\overline{\mathbf{r}}(t)\right\}. \quad (3.9)$$

КС (3.4) можно получить и по методу Глаубера действием оператора сдвига $D(\boldsymbol{\alpha},t) = \exp\left[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}^+(t) - \boldsymbol{\alpha}^+\mathbf{A}^-(t)\right] = \prod_{i=1}^{3}\exp\left[\alpha_i A_i^+(t) - \alpha_i^* A_i^-(t)\right] = e^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}|^2}\prod_{i=1}^{3} e^{\alpha_i A_i^+} e^{-\alpha_i^* A_i^-}$ на вакуумное состояние $\psi_0(\mathbf{r},t) = L_0\prod_{i=1}^{3} e^{-\frac{\lambda_1 x_i^2}{2\hbar\varepsilon(t)}} = L_0 e^{-\frac{\lambda_1\mathbf{r}^2}{2\hbar\varepsilon(t)}}$, определяемое из уравнения $\mathbf{A}^-\psi_{\mathbf{0}} = 0$, т.е.

$$\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t) = D(\boldsymbol{\alpha},t)\psi_0(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}|^2}\sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\alpha_3^{n_3}}{\sqrt{n_1!n_2!n_3!}}\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},t), \quad (3.10)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, а

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},t) = \prod_{i=1}^{3}\frac{\left[A_i^+(t)\right]^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{r},t) = L_0\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\varepsilon^*(t)}{\varepsilon(t)}\right)^{\frac{n_i}{2}} H_{n_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\hbar}|\varepsilon(t)|}\right)e^{-\frac{\lambda_1\mathbf{r}^2}{2\hbar\varepsilon(t)}}. \quad (3.11)$$

Используя свойства ортогональности и полноты для состояний $\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},t)$

$$\int\psi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{r},t)\psi_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r},t)d\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'},$$
$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty}\psi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{r},t)\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}',t) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (3.12)$$

можно легко доказать формул (3.7) для обобщенных КС свободной квантовой частицы переменной массы.

Плотность вероятности координат, генерируемая КС (3.4), имеет вид.

$$\rho_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t) = |\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r},t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{(\pi\hbar)^3|\varepsilon|^3}}\exp\left\{-\frac{\left[\mathbf{r}-\overline{\mathbf{r}}\,(t)\right]^2}{\hbar|\varepsilon(t)|^2}\right\}. \quad (3.13)$$

Она зависит от времени, в то время как, плотность вероятности распределения импульса, как следует из (3.9), не зависит от времени, что так и должно быть, поскольку импульс свободной частицы остается постоянной с течением времени

$$\rho_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{p},t) = |\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{p},t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{(\pi\hbar)^3|\lambda_1|^3}}\exp\left\{-\frac{1}{\hbar|\lambda_1|^2}(\mathbf{p}-\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}})^2\right\}. \quad (3.14)$$

В заключение данного раздела приведем также явный вид пропаготора

$$K(\mathbf{r}_2,t;\mathbf{r}_1,t_0)=\theta(t-t_0)U(\mathbf{r}\ ,t)\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\theta(t-t_0)\left(4\pi i\hbar S_2\right)^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{i(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2}{4\hbar S_2}}. \qquad (3.15)$$

4. Стандартные отклонения, соотношения неопределенности и когерентные состояния

Вычислим стандартные отклонения $\sigma_{\mathbf{r}}(t)$, $\sigma_{\mathbf{p}}(t)$ и величину $\sigma_{\mathbf{rp}}(t)$ на обобщенных КС:

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathbf{r}}(t)=\sqrt{\overline{(\Delta\hat{\mathbf{r}})^2}}=\sqrt{\frac{3\hbar}{2}}|\varepsilon(t)|,\quad \sigma_{\mathbf{p}}(t)=\sqrt{\overline{(\Delta\hat{\mathbf{p}})^2}}=\sqrt{\frac{3\hbar}{2}}|\lambda_1|,\\&\sigma_{\mathbf{rp}}(t)=\frac{1}{2}\left[\overline{\Delta\hat{\mathbf{r}}\Delta\hat{\mathbf{p}}}+\overline{\Delta\hat{\mathbf{p}}\Delta\hat{\mathbf{r}}}\right]=\frac{3i\hbar}{2}\left[1-\lambda_1^*\varepsilon(t)\right],\end{aligned} \qquad (4.1)$$

где $\Delta\hat{\mathbf{r}}=\hat{\mathbf{r}}-\overline{\mathbf{r}}$, $\Delta\hat{\mathbf{p}}=\hat{\mathbf{p}}-\overline{\mathbf{p}}$. Легко проверять, что КС (3.4) минимизируют соотношение неопределенности Робертсона-Шредингера, т.е.

$$\sigma_{\mathbf{r}}^2(t)\sigma_{\mathbf{p}}^2-\sigma_{\mathbf{rp}}^2(t)=\frac{9\hbar^2}{4}. \qquad (4.2)$$

Отметим, что это равенство эквивалентно следующим трем соотношением

$$\sigma_x^2(t)\sigma_{p_x}^2(t)-\sigma_{xp_x}^2(t)=\sigma_y^2(t)\sigma_{p_y}^2(t)-\sigma_{yp_y}^2(t)=\sigma_z^2(t)\sigma_{p_z}^2(t)-\sigma_{zp_z}^2(t)=\frac{\hbar^2}{4}. \qquad (4.3)$$

Это означает, что данные КС для любого момента времени $t>t_0$ являются сжатыми состояниями свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы $M(t)$.

Оценим теперь соотношение неопределенности Гейзенберга с учетом ограничения (2.12):

$$\sigma_{\mathbf{r}}(t)\sigma_{\mathbf{p}}(t)\Big|_{\mathrm{Re}\left(\lambda_1^*\lambda_2\right)=1}=\frac{3\hbar}{2}\sqrt{1+|\lambda_1|^2\left[|\lambda_2|\sin\mu+2|\lambda_1|S_2(t)\right]^2}\geq\frac{3\hbar}{2}. \qquad (4.4)$$

Это равенство также эквивалентно трем соотношениям:

$$\begin{aligned}&\sigma_x(t)\sigma_{p_x}(t)\Big|_{\mathrm{Re}\left(\lambda_1^*\lambda_2\right)=1}=\sigma_y(t)\sigma_{p_y}(t)\Big|_{\mathrm{Re}\left(\lambda_1^*\lambda_2\right)=1}=\sigma_z(t)\sigma_{p_z}(t)\Big|_{\mathrm{Re}\left(\lambda_1^*\lambda_2\right)=1}=\\&=\frac{\hbar}{2}\sqrt{1+|\lambda_1|^2\left[|\lambda_2|\sin\mu+2|\lambda_1|S_2(t)\right]^2}\geq\frac{\hbar}{2}.\end{aligned} \qquad (4.5)$$

В начальный момент времени $t=t_0$ соотношение (4.4) принимает вид

$$\sigma_{\mathbf{r}}\sigma_{\mathbf{p}}\Big|_{\mathrm{Re}\left(\lambda_1^*\lambda_2\right)=1}=\frac{3\hbar}{2}|\lambda_1||\lambda_2|=\frac{3\hbar}{2}\sqrt{1+|\lambda_1|^2|\lambda_2|^2\sin^2\mu}, \qquad (4.6)$$

где $\sigma_{\mathbf{r}} \equiv \sigma_{\mathbf{r}}(0) = \sqrt{\frac{3\hbar}{2}}|\lambda_2|$, $\sigma_{\mathbf{p}} \equiv \sigma_{\mathbf{p}}(0) = \sqrt{\frac{3\hbar}{2}}|\lambda_1|$. Отсюда следует, что должно быть $|\lambda_1| \neq 0$ и $|\lambda_2| \neq 0$. Левая часть равенства (4.6) минимальна при $\mu_2 = \mu_1$ т.е. при $\mu = 0$:

$$\sigma_{\mathbf{r}}\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{3\hbar}{2}. \tag{4.7}$$

Назовем обобщенные КС (3.4) с ограничением $\mu_2 = \mu_1$ как КС свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы. При $\mu_2 = \mu_1$ ограничение (2.12) принимает вид $|\lambda_1||\lambda_2| = 1$ или $\lambda_2^* = \lambda_1^{-1}$. В дальнейшем полагаем $\mu_2 = \mu_1 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\lambda_2 = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{2}{3\hbar}}\sigma_{\mathbf{r}}, \quad \lambda_1 = |\lambda_1| = \sqrt{\frac{2}{3\hbar}}\sigma_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{3\hbar}{2}}\frac{1}{\sigma_{\mathbf{r}}}, \\
&\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{2}{3\hbar}}\left[\sigma_{\mathbf{r}} + \frac{3i\hbar}{\sigma_{\mathbf{r}}}S_2(t)\right], \\
&\sigma_{\mathbf{r}}(t) = \sqrt{\frac{3\hbar}{2}}|\varepsilon(t)| = \sqrt{\sigma_{\mathbf{r}}^2 + \frac{9\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{\mathbf{r}}^2}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

С учетом (4.8) для момента времени $t > t_0$ соотношение Гейзенберга для КС гласит

$$\sigma_{\mathbf{r}}(t)\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{3\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{9\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{\mathbf{r}}^4}} \geq \frac{3\hbar}{2}, \tag{4.9}$$

а КС свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы записываются в виде

$$\psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\sigma_r}(\mathbf{r},t) = \left(\sqrt[4]{\frac{3}{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sigma_{\bar{\mathbf{r}}}(1+it/T)}}\right)^3 \exp\left\{-\frac{3[\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}\ (t)]^2}{4\sigma_{\mathbf{r}}^2(1+it/T)} + \frac{i}{\hbar}\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}\left[\mathbf{r} - \frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}(t)\right]\right\}. \tag{4.10}$$

Время расплывания волнового пакета определяется формулой

$$T = \frac{t\sigma_{\mathbf{r}}^2}{3\hbar S_2(t)} = \frac{t\sigma_x^2}{\hbar S_2(t)}. \tag{4.11}$$

Здесь, по существу, мы располагаем семейством КС (4.10), параметризованным одним вещественным параметром $\sigma_{\mathbf{r}}$. Каждый набор КС в семействе имеет свои конкретные исходные стандартные отклонения $\sigma_{\mathbf{r}} > 0$. КС из семейства с данным $\sigma_{\mathbf{r}}$ помечаются векторным комплексным квантовым числом $\boldsymbol{\alpha}$. Вектор $\boldsymbol{\alpha}$ выражается через начальные данные $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$ и $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{\mathbf{r}}}\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + \frac{i\sigma_{\mathbf{r}}}{\sqrt{3}\hbar}\bar{\mathbf{p}}_0, \text{ т.е. } \operatorname{Re}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma}\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}, \ \operatorname{Im}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\sigma_{\mathbf{r}}}{\sqrt{3}\hbar}\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}. \tag{4.12}$$

Плотность вероятности координат, генерируемые КС (4.10) имеет вид

$$\rho_{\boldsymbol{\alpha}}^{\sigma_{\mathbf{r}}}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathbf{r}}(t)}\right)^3 \exp\left\{-\frac{3[\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}(t)]^2}{2\sigma_{\mathbf{r}}^2(t)}\right\}. \tag{4.13а}$$

Это выражение можно представить как произведение одномерных распределений, т.е.

$$\rho_{\boldsymbol{\alpha}}^{\sigma_{\mathbf{r}}}(\mathbf{r},t) = \prod_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}(t)}e^{-\frac{[x_i-\bar{x}_i(t)]^2}{2\sigma_{x_i}^2(t)}}, \tag{4.13в}$$

Следовательно, в любой момент времени t плотность распределения вероятности координат (4.13) задается гауссовым распределением со стандартным отклонением $\sigma_{\mathbf{r}}(t)$.

Оценим время расплывания волнового пакета на двух примерах зависимости $M(t)$ от t:

1) $M(t) = me^{-\alpha t}$, $\alpha > 0, t_0 = 0$. В этом случае $S_2(t) = \frac{1}{2m\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$ и время расплывания с течением времени экспоненциально уменьшается, т.е. $T \propto e^{-\alpha t} \to 0$ при $t \to \infty$;

2) $M = me^{\alpha t}, \alpha > 0$ и $t_0 = 0$. Тогда $S_2(t) = \frac{(1 - e^{-\alpha t})}{2m\alpha}$ и $T \propto t \to \infty$ при $t \to \infty$, т.е. со временем время расплывания линейно увеличивается.

Среднее значение координат $\bar{\mathbf{r}}(t) = \bar{\mathbf{r}}_0 + 2S_2(t)\bar{\mathbf{p}}_0$ движется по классической траектории со скоростью $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}/M(t)$. С той же скоростью движется максимум плотности вероятности координатных распределения (4.13).

Сравним КС (4.10) с плоской волной, описывающей движение свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы

$$\psi_{\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}U(\mathbf{r},t)e^{\frac{i}{\hbar}\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}\mathbf{r} - \bar{\mathbf{p}}_0^2 S_2(t)\right]\right\}. \tag{4.14}$$

Оба набора функций являются решениями уравнения Шредингера (2.1) для свободной квантовой частицы переменной массы. КС принадлежат пространству квадратично интегрируемых функций $L^2(R^3)$, тогда как плоские волны ему не принадлежат. Фазовая скорость плоской волны $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}/2M(t)$ не равна скорости частицы $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}/M(t)$. Групповая скорость волнового пакета (4.13) в точности совпадает со скоростью частицы: $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}/M(t)$. В зависимости от параметров КС, некоторые из них можно рассматривать в качестве полуклассических состояний свободных квантовых частиц, а некоторые нельзя, из-за того что они описывают чисто квантовые состояния частицы.

5. Полуклассические когерентные состояния свободной квантовой частицы

Полуклассическое движение подразумевает, что форма распределения (4.13) координат меняется со временем в некотором смысле медленно. За изменением этой формы отвечает изменение величине $\sigma_{\mathbf{r}}^2(t)$, которое обусловлено изменением величины $9\hbar^2 S_2^2(t)/\sigma_{\mathbf{r}}^2$. Для полуклассического движения эта величина значительно меньше квадрата расстояния, пройденного частицей за тот же промежуток времени, т.е.

$$\frac{9\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{\mathbf{r}}^2} << \left[\bar{\mathbf{p}}_0 \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{M(t')}\right]^2 \text{ или } |\bar{\mathbf{p}}_0| >> \frac{3\hbar}{2\sigma_{\mathbf{r}}}, \tag{5.1}$$

отсюда $\lambda << \frac{4\pi}{3}\sigma_{\mathbf{r}}$, где $\lambda = 2\pi\hbar/|\bar{\mathbf{p}}_0|$ есть де-бройлевская длина волны частицы. Следовательно, при условии, когда де-бройлевская длина волны частицы значительно меньше стандартного отклонения $\sigma_{\mathbf{r}}$ в начальный момент времени, КС (4.10) будут полуклассическими состояниями.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант № EIF-KETPL-2-2015-1(2015)-1(25)-56/02/1.

References

1. R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals (McGraw-Hill, New York,1965).
2. E. Schrödinger, Further studies on solving eigenvalue problems by factorization, Proc. Roy. Irish Acad., 46 A (1941) 183-206.
3. L.Infeld, T.E. Hull, The factorization method, Rev.Mod. Phys. 23:1(1951) 21-68.
4. H.R. Lewis, W.B.Riesenfeld, An exact quantum theory of the time-dependent electromagnetic field, J.Math. Phys., 10(1969) 1458-1473.
5. V.V.Dodonov, V.I.Man'ko. Invariants and the evolution of nonststionary quantum system, Proc of the Lebedev Phys Institute, vol. 183, Ed. M.A.Markov (Commack, NY: Nova Science, 1989).
6. K.Husimi, Miscellanea in elementary quantum physics, II, Prog. Theor. Phys. 9(1953) 381-402.
7. O.Ciftja, A simple derivation of the exact wavefunction of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency, J.Phys. A: Math. Gen. 32 (1999) 6385-6389.
8. F.J. Dyson,The S matrix in quantum electrodynamics, Phys. Rev., 75:1 (1949)1736-1755.
9. G.Dattoli, J.Gallardo, A.Torre, Time-ordering techniques and solution of differential difference equation appearing in quantum optics, J. Math. Phys., 27:3(1986) 772–780.
10. A.R.P.Rau, K. Unnikrishnam, Evolution operators and wave functions in a time-dependent electric field, Phys. Lett. A 222(1996) 304–308.
11. C.F.Lo, Time evolution of a charged oscillator with a time-dependent mass and frequency in a time-dependent electromagnetic field, Phys. Rev. A45(1992) 5262–5265.
12. Sh.M. Nagiyev, K.Sh. Jafarova, Relativistic quantum particle in a time-dependent homogeneous field, Phys. Lett. A 377(2013) 747-752.

13. Sh. M. Nagiyev, Using the evolution operator method to describe a particle in a homogeneous alternating field, Theor. and Math. Phys, 194:2(2018) 313–327.
14. Sh.M.Nagiyev, A.İ.Ahmadov, On the time evolution of quadratic quantum systems: evolution operators, propagators, invariants, (to be published in Theor. and Math. Phys.).
15. P.Camiz, A.Gerardi, C.Marchioro, E.Presutti, E.Scacciatelli. Exact solution of a time-dependent quantal harmonic oscillator with a singular perturbating, J.Math. 12(1971) 2040-2043.
16. A.M.Perelomov, V.S.Popov, Method of generating functions for a quantum oscillator, Theor. and Math. Phys., 3:3 (1970) 377-391.
17. C.A.S.Ferreira, P.T.S. Alencar, J.M.F.Bassalo, Wave functions of time-dependent harmonic oscillator in a static magnetic field, Phys. Rev. A66(2002) 024103.

ON THE TIME EVOLUTION OF A FREE NONERALATIVISTIC QUANTUM PARTICLE

Sh.M. Nagiyev[1], A.I. Ahmadov[2], Sh.A. Amirova[1]

[1]Institute of Physics of ANAS,
[2]Institute for Physical Problems, Baku State University
shakir.m.nagiyev@gmail.com, ahmadovazar@yahoo.com

Abstract: Using the evolution operator method, we construct coherent states of a nonrelativistic free particle with a variable mass M(t). Under certain physical conditions, they can be regarded as semiclassical states of particles.

We discuss the properties (in particular, the completeness relation, the minimization of the uncertainty relations, and the time evolution of the corresponding probability density) of the found coherent states in detail. We also construct exact wave functions of the oscillator type and of the plane-wave type. We establish the unitary equivalence of the problems of a free particle and a particle in a homogeneous alternating field.

Keywords: nonrelativistic quantum free particle, evolution operator, coherent states, oscillatory states.

QEYRİ-RELYATİVİSTİK SƏRBƏST KVANT ZƏRRƏCİYİNİN ZAMANA GÖRƏ TƏKAMÜLÜ HAQQINDA

Ş.M. Nağıyev[1], A.İ. Əhmədov[2], Ş.Ə. Əmirova[1]

[1]AMEA Fizika İnstitutu,
[2]Bakı Dövlət Universiteti, Fizika Problemlər İnstitutu
shakir.m.nagiyev@gmail.com, ahmadovazar@yahoo.com

Xülasə: Evolyusiya operatoru metodunun köməyilə qeyri-relyativistik dəyişən $M(t)$ kütləli sərbəst kvant zərrəciyinin koherent halları qurulmuşdur. Müəyyən fiziki şərtlər daxilində onlara zərrəciyin yarıklassik halları kimi baxmaq olar. Tapılmış koherent halların xassələri, o cümlədən, tamlıq şərti, qeyri-müəyyənlik münasibətinin minimumlaşdırılması və uyğun ehtimal sıxlığının zaman görə təkamülü ətraflı təhlil olunur. Həmçinin ossilyator tipli və müstəvi dalğa tipli dalğa funksiyaları da qurulmuşdur.

Açar sözlər: qeyri-relyativistik sərbəst kvant zərrəciyi, evolyusiya operatoru, koherent hallar, ossilyator halları.